



§ 4.6 偏序关系

偏序关系： A 上的关系 R 是自反的、反对称的和传递的，则称 R 为偏序关系。记作 $\leq$

若 $\langle x, y \rangle \in$ 偏序关系 $\leq$ ，则可记作 $x \leq y$ 。

偏序集： 一个集合 A 与 A 上的偏序关系 R 一起叫作偏序集。记作 $\langle A, R \rangle$ 。





§ 4.6 偏序关系

例13: 设 $A = \{1, 2, 3\}$, A 上关系 R 是通常意义下的小于或等于关系, 试写出 R 并验证它是偏序关系。

解: $R = \{ \langle 1, 1 \rangle, \langle 1, 2 \rangle, \langle 1, 3 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 3, 3 \rangle \}$

(1) 因 $\langle 1, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 3, 3 \rangle$ 均属于 R ,

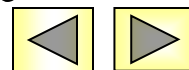
所以 R 是自反的。

(2) 对任意 $\langle x, y \rangle \in R$ 有 $x \leq y$, 当 $x \neq y$ 时 $\langle y, x \rangle \notin R$

所以 R 是反对称的。

(3) 对任意 $\langle x, y \rangle \in R$, $\langle y, z \rangle \in R$ 有 $x \leq y \wedge y \leq z$,

则 $x \leq z$, 于是 $\langle x, z \rangle \in R$, 所以 R 是传递的。

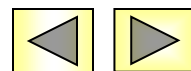


§ 4.6 偏序关系

例14: 设 $A = \{a, b\}$, 证明 $\langle P(A), R_{\subseteq} \rangle$ 是偏序集。

解: $R_{\subseteq} = \{ \langle \emptyset, \emptyset \rangle, \langle \emptyset, \{a\} \rangle, \langle \emptyset, \{b\} \rangle, \langle \emptyset, \{a, b\} \rangle, \\ \langle \{a\}, \{a\} \rangle, \langle \{a\}, \{a, b\} \rangle, \langle \{b\}, \{b\} \rangle, \\ \langle \{b\}, \{a, b\} \rangle, \langle \{a, b\}, \{a, b\} \rangle \}$

由 $\langle \emptyset, \emptyset \rangle, \langle \{a\}, \{a\} \rangle, \langle \{b\}, \{b\} \rangle, \langle \{a, b\}, \{a, b\} \rangle$ 均属于 $R_{\subseteq}$, 则 $R_{\subseteq}$ 是自反的; 对任意 $\langle x, y \rangle \in R_{\subseteq}$ 有 $x \subseteq y$, 当 $x \neq y$ 时有 $\langle y, x \rangle \notin R_{\subseteq}$, 则 $R_{\subseteq}$ 是反对称的; 对任意 $\langle x, y \rangle \in R_{\subseteq}$ 且 $\langle y, z \rangle \in R_{\subseteq}$ 有 $x \subseteq y \wedge y \subseteq z$, 则有 $x \subseteq z$, 即 $\langle x, z \rangle \in R_{\subseteq}$, 于是 $R_{\subseteq}$ 是传递的。因此 $\langle P(A), R_{\subseteq} \rangle$ 是偏序集。



§ 4.6 偏序关系

对于偏序集 $\langle A, \leq \rangle$,

- (1) 如果对任意 $x, y \in A$, 或者 $x \leq y$ 或者 $y \leq x$ 成立,
则称 x 与 y 可比。
- (2) 如果 $x < y$ 且不存在 $z \in A$, 使 $(x < z) \wedge (z < y)$,
则称 y 盖住 x 。

全序关系: 偏序集 $\langle A, \leq \rangle$, 若对任意的 $x, y \in A$, 都有
 x 与 y 可比, 则称 $\leq$ 为 A 上的全序关系。
且称 $\langle A, \leq \rangle$ 为全序集。

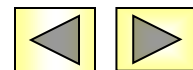


§ 4.6 偏序关系

偏序集 $\langle A, \leq \rangle$ 的哈斯图:

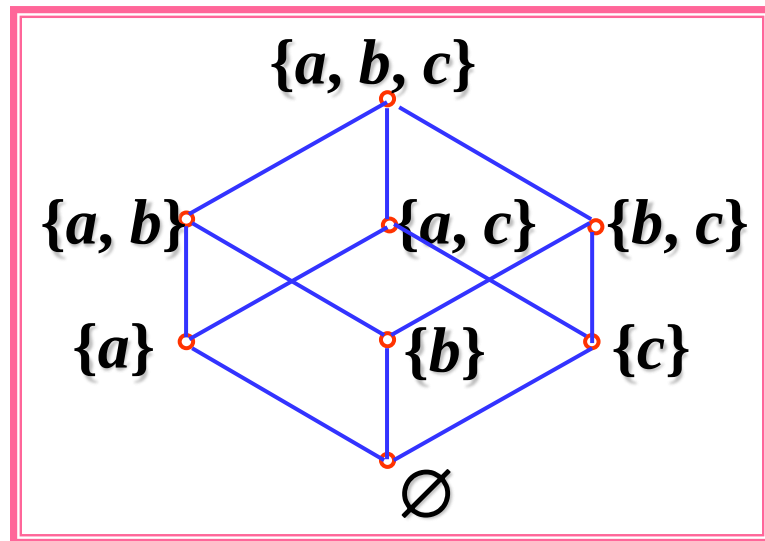
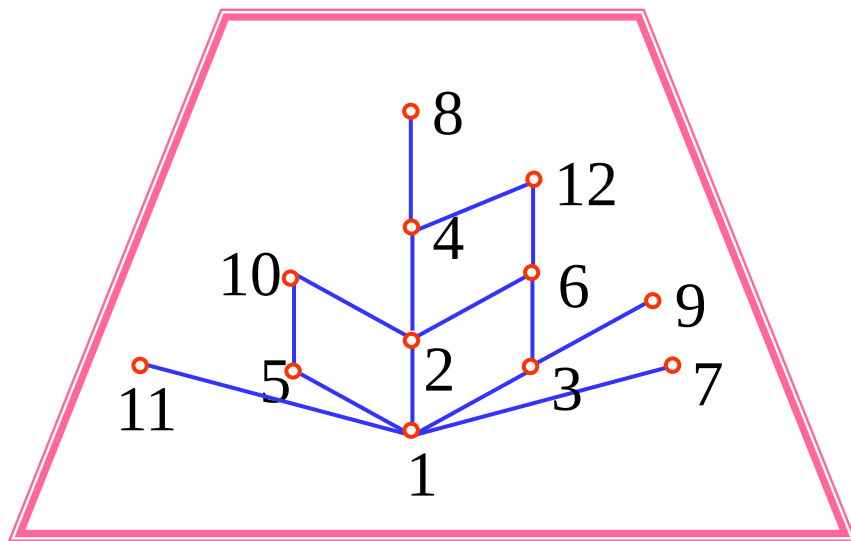
- (1) 用小圆圈分别表示 A 的每一个元素(称为结点)。
- (2) 按每个元素在偏序中的次序从底向上排列
结点位置。
- (3) 如果 y 盖住 x , 则在 x 和 y 之间连一条线。

特别地, 全序集的哈斯图是一条直线。



§ 4.6 偏序关系

例15: 画出 $\langle \{1, 2, \dots, 12\}, R_{\text{整除}} \rangle$ 和 $\langle P(\{a, b, c\}), R_{\subseteq} \rangle$ 的哈斯图。

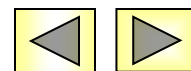


§ 4.6 偏序关系

偏序集中的一些特殊元素：

设 $\langle A, \leq \rangle$ 为偏序集， $B \subseteq A$ ，

- (1) 若 $\exists y(y \in B)$ ，使得 $\forall x(x \in B \rightarrow y \leq x)$ 成立，
则称 y 是 B 的最小元。(小于 B 中所有元)
- (2) 若 $\exists y(y \in B)$ ，使得 $\forall x(x \in B \rightarrow x \leq y)$ 成立，
则称 y 是 B 的最大元。(大于 B 中所有元)
- (3) 若 $\exists y(y \in B)$ ，使得 $\neg \exists x(x \in B \wedge x < y)$ 成立，
则称 y 是 B 的极小元。(B 中没有比 y 小的其他元)



§ 4.6 偏序关系

- (4) 若 $\exists y(y \in B)$ ，使得 $\neg \exists x(x \in B \wedge y < x)$ 成立，
则称 y 是 B 的极大元。 $(B$ 中没有比 y 大的其他元)
- (5) 若 $\exists y(y \in A)$ ，使得 $\forall x(x \in B \rightarrow x \leq y)$ 成立，
则称 y 是 B 的上界。
- (6) 若 $\exists y(y \in A)$ ，使得 $\forall x(x \in B \rightarrow y \leq x)$ 成立，
则称 y 是 B 的下界。
- (7) 令 $C = \{y | y \text{ 是 } B \text{ 的上界}\}$ ，则称 C 的最小元
为 B 的最小上界或上确界。
- (8) 令 $C = \{y | y \text{ 是 } B \text{ 的下界}\}$ ，则称 C 的最大元
为 B 的最大下界或下确界。



§ 4.6 偏序关系

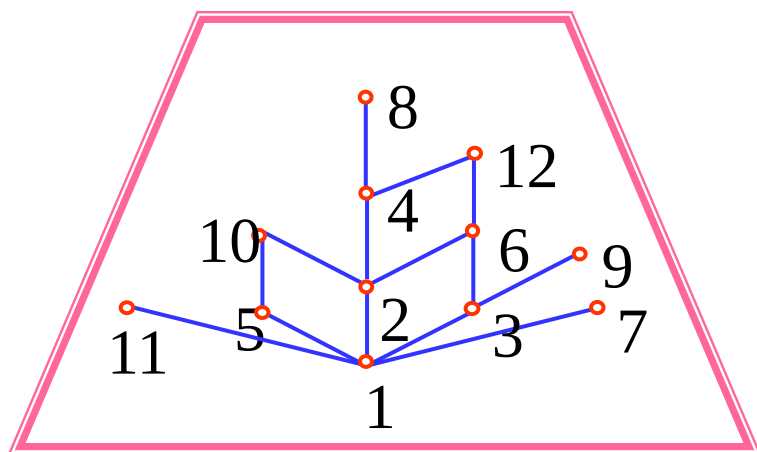


图1

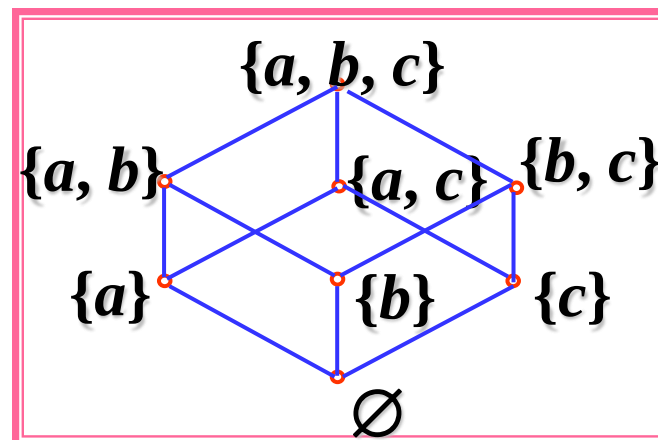


图2

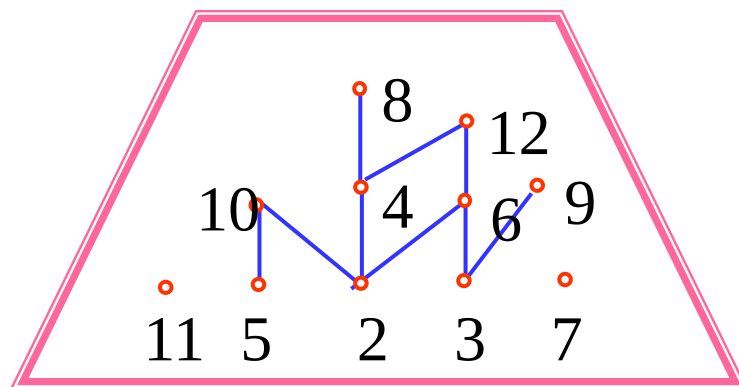


图3

